Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ 7/11/2016

10ο Μάθημα

$\mathbb{R}$: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$:$\Leftrightarrow \{x_\nu \to x_0 \Rightarrow f(x_\nu) \to f(x_0)\}$

$\mathbb{R}^2$: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$:$\Leftrightarrow \{(x_\nu, y_\nu) \to (x_0, y_0) \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_\nu, y_\nu) \to f(x_0, y_0)\}$

(A) Πραγματικές συναρτήσεις

Ορισμός:

Εστω $U \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ σ.σ. του U και $\ell \in \mathbb{R}$. Τότε η f συγκλίνει στο ℓ στο σημείο $\bar{x}_0$, αν $\forall (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\}$: $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \Rightarrow f(\bar{x}_\nu) \to \ell$

Πρόταση:

$f(\bar{x}) \to \ell$, όταν $\bar{x} \to \bar{x}_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \bar{x} \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta) \setminus \{\bar{x}_0\}$
$|f(\bar{x}) - \ell| < \varepsilon$

απόδειξη

($\Rightarrow$:) (με επαγωγή σε άτοπο)

Εστω ότι $\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0$
$\exists \bar{x} \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta) \setminus \{\bar{x}_0\}$: $|f(\bar{x}) - \ell| \geq \varepsilon$
$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \ \forall \nu \in \mathbb{N} \ \exists \bar{x}_\nu \in U \cap B(\bar{x}_0, \frac{1}{\nu}) \setminus \{\bar{x}_0\}$
$(\delta = \frac{1}{\nu})$ έτσι ώστε $|f(\bar{x}_\nu) - \ell| \geq \varepsilon$
$\Rightarrow \exists (\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\}$, $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$ και $f(\bar{x}_\nu) \not\to \ell$

(:$\Leftarrow$) Εστω $(\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0$. ΘΔΟ $f(\bar{x}_\nu) \to \ell$
Εστω $\varepsilon > 0$ τότε $\exists \delta > 0 \ \forall \bar{x} \in U \cap B(\bar{x}_0, \delta) \setminus \{x_0\}$
έτσι ώστε $|f(\bar{x}) - \ell| < \varepsilon$ (*)
Ομως $\exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu \geq \nu_0$: $\|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| < \delta$
(προκύπτει από το ότι $\underbrace{\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0}_{\Leftrightarrow \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \to 0}$)

δηλαδή $\exists \nu_0 \in \mathbb{N} \ \forall \nu \geq \nu_0$: $\bar{x}_\nu \in B(\bar{x}_0, \delta) \setminus \{\bar{x}_0\} \cap U$
$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \forall \nu \geq \nu_0$: $|f(\bar{x}_\nu) - \ell| < \varepsilon$

Συνεπώς, $\forall \varepsilon>0 \ \exists \nu_0 \in \mathbb{N}, \ \forall \nu \geq \nu_0 : |f(\bar{x}_\nu) - l| < \varepsilon$
δηλαδή $f(\bar{x}_\nu) \to l$.

Πρόταση:

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ σσ του U. Το όριο μιας συγκλίνουσας συνάρτησης f, όταν το $\bar{x}$ συγκλίνει στο $\bar{x}_0$, είναι μοναδικό και συμβολίζεται με $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x})$

απόδειξη

(με απαγωγή σε άτοπο)

Έστω $l_1 \neq l_2$ τω $f(\bar{x}) \to l_1$ και $f(\bar{x}) \to l_2$ τότε (...)

ΑΣΚΗΣΗ

Θεώρημα:

Ιδιότητες: Άλγεβρα ορίων

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x}_0$ σ.σ. του U και $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = l$, $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} g(\bar{x}) = m$

α) $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} (f+g)(\bar{x}) = l + m$

β) $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} (af)(\bar{x}) = al \quad \forall a \in \mathbb{R}$

γ) $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} (fg)(\bar{x}) = lm$

δ) $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \left(\frac{f}{g}\right)(\bar{x}) = \frac{l}{m}$, αν $m \neq 0$

ε) Αν $h : V \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(U) \subset V$ τότε $\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} (h \cdot f)(\bar{x}) = h \cdot l$

απόδειξη

ε) Έστω $(\bar{x}_\nu) \subset U \setminus \{\bar{x}_0\}$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \Rightarrow f(\bar{x}_\nu) \to l$

$\Longrightarrow (h \circ f)(\bar{x}_\nu) \longrightarrow h(l)$

$\underbrace{h \text{ συνεχής στο } l \in V}$

$\Longleftrightarrow \forall (z_\nu) \subset V, \ z_\nu \to l : h(\bar{z}_\nu) \to h(l)$

Πόρισμα:

$\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} f(\bar{x}) = l \overset{|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ συνεχής}}{\Longrightarrow} \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} |f(\bar{x})| = |l| \overset{\sqrt{\cdot} : [0,\infty) \to \mathbb{R} \text{ συνεχώς}}{\Longrightarrow} \lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} \sqrt{|f(\bar{x})|} = \sqrt{|l|}$

Παραδείγματα:

α) $f(x,y) = x$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = x_0$

δ.ν.δ. ότι αν $\underbrace{(x_\nu, y_\nu) \to (x_0, y_0)}$ τότε $x_\nu \to x_0$

$\Rightarrow \|(x_\nu, y_\nu) - (x_0, y_0)\| \to 0 \Leftrightarrow \|(x_\nu - x_0, y_\nu - y_0)\| \to 0$

$\Rightarrow 0 \leq |x_\nu - x_0| \leq \|(x_\nu - x_0, y_\nu - y_0)\| \to 0$

β) $g(x,y) = |x| \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = |x_0|$

γ) $G(x,y) = xy \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} G(x,y) = x_0 y_0$

Θέμα Σεπτεμβρίου 2016:

Υπολογίστε τα όρια:

α) $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$

β) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\cos(xy) - 1}{xy}$

Λύση

α) Έστω $\underbrace{(x_\nu, y_\nu, z_\nu) \to (0,0,0)}_{\Leftrightarrow \|(x_\nu, y_\nu, z_\nu)\| \to 0}$ με $\underbrace{(x_\nu, y_\nu, z_\nu) \neq (0,0,0)}_{\Leftrightarrow x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2 \neq 0}$

ΘΔΟ $\left| \dfrac{x_\nu y_\nu z_\nu}{x_\nu^2 + y_\nu^2 + z_\nu^2} \right| \to 0$

$\Leftrightarrow 0 \leq \dfrac{|x_\nu|\,|y_\nu|\,|z_\nu|}{\|(x_\nu, y_\nu, z_\nu)\|^2} \to 0$

$|x_i| \leq \|(x_1, \dots, x_n)\| \quad \forall i = 1, \dots, n$

Το οποίο ισχύει, αφού $0 \leq \dfrac{|x_\nu||y_\nu||z_\nu|}{\|(x_\nu, y_\nu, z_\nu)\|^2} \leq \|(x_\nu, y_\nu, z_\nu)\| \to 0$

β) Έχαμε για την $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

με $h(a) = \begin{cases} \cos \frac{a-1}{a} & , a \neq 0 \\ \underbrace{\lim_{a \to 0} \frac{\cos b - 1}{b}}_{=\gamma} & , a = 0 \end{cases}$ ότι είναι συνεχής.

Έστω $h(a) = \cos \frac{a-1}{a}$ είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\cos(xy) - 1}{xy} = \gamma$$

$$\left[\underbrace{(x_\nu, y_\nu)}_{\neq (0,0)\ \forall \nu \in \mathbb{N}} \to (0,0) \Rightarrow x_\nu y_\nu \to 0 \Rightarrow \frac{\cos(x_\nu y_\nu) - 1}{x_\nu y_\nu} \to \gamma \right]$$

$$\gamma = \frac{1}{2}$$

Παράδειγμα:

Εξετάστε αν $\exists$ το όριο $\lim_{(x,y) \to (1,2)} \frac{(x-1)(y-2)}{(x-1)^2 + y^2 - 4y + 4}$